

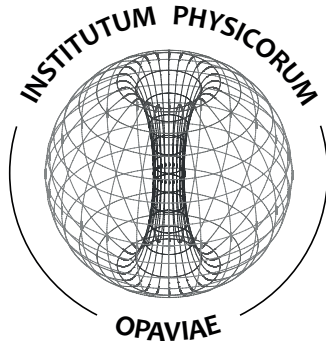
Neutronové hvězdy, podivné hvězdy a hybridní hvězdy

Neutron stars, strange stars and hybrid stars

Ondřej Chlopčík

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

SLEZSKÁ UNIVERZITA V OPAVĚ | FYZIKÁLNÍ ÚSTAV V OPAVĚ



Neutronové hvězdy, podivné hvězdy a hybridní hvězdy

Neutron stars, strange stars and hybrid stars

Ondřej Chlopčík

Vedoucí: Mgr. Martin Urbanec, Ph.D.

Program: B0533A110018 Fyzika

Specializace: Astrofyzika

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

OPAVA 2023

Abstrakt

Cílem této práce je zkoumat kompaktní hvězdy a jejich vlastnosti, včetně hmotností, poloměrů, vnitřních struktur a dalších významných vlastností. Zvláštní pozornost bude věnována srovnání standardních neutronových hvězd s hybridními hvězdami, které mají kvantovou hmotu ve svém jádru. Dále se práce zaměří na porovnání těchto objektů s podivnými hvězdami, které jsou složeny z kvarkové hmoty a to od jádra až po povrch. Součástí práce je vytvoření programu pro hledání fázových přechodů mezi baryonovou a kvarkovou hmotou, následně sestavení hybridních stavových rovnic pro výpočet modelu kvarkové hvězdy.

Abstract

The aim of this study is to investigate compact stars and their properties, including their masses, radii, internal structures, and other significant features. Special attention will be given to comparing standard neutron stars with hybrid stars that have quark matter in their cores. Additionally, the study will focus on comparing these objects with strange stars, which are composed of quark matter from their core to their surface. The work includes developing a program for finding phase transitions between baryonic and quark matter and subsequently constructing a hybrid equation of state to calculate the model of a quark star.

Klíčová slova

Kompaktní hvězdy | neutronové hvězdy | hybridní hvězdy | podivné hvězdy | kvarková hmota | stavové rovnice | model hybridní hvězdy |

Key words

Compact stars | neutron stars | hybrid stars | strange stars | quark matter | equations of state | hybrid star model |

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2023/2024

Zadávací ústav:	Fyzikální ústav v Opavě
Student:	Ondřej Chlopčík
UČO:	57064
Program:	Fyzika
Specializace:	Astrofyzika
Téma práce:	Neutronové hvězdy, podivné hvězdy a hybridní hvězdy
Téma práce anglicky:	Neutron stars, strange stars and hybrid stars
Zadání:	Cílem práce je zkoumat kompaktní hvězdy, jejich globální vlastnosti (hmotnosti, poloměry apod.) a jejich vnitřní strukturu. Práce se primárně zaměří na srovnání standardních neutronových hvězd s hybridními hvězdami, které obsahují kvantovou hmotu ve svém jádru. Práce se dále bude věnovat i na srovnání těchto objektů s tzv. podivnými hvězdami, které jsou tvořeny kvarkovou hmotou od jádra až k povrchu.
Literatura:	Blaschke D., Chamel N., "Phases of Dense Matter in Compact Stars", <i>Astrophysics and Space Science Library</i> , 457, 337, 01/2018 Alcock C., Farhi E., Olinto A., "Strange Stars", <i>The Astrophysical Journal</i> , 310, 261, 11/1986 Lattimer J. M., Prakash M., "Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints", <i>Physics Reports</i> , 442, 109, 04/2007
Vedoucí práce:	Mgr. Martin Urbanec, Ph.D.
Datum zadání práce:	25. 10. 2022

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

.....
prof. RNDr. Zdeněk Stuchlík, CSc.
ředitel

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto závěrečnou práci vypracoval samostatně jen s použitím uvedené literatury uvedené v bibliografii a na základě konzultací s vedoucím práce. Uvedl jsem všechny prameny, z nichž jsem při psaní práce čerpal.

Autor souhlasí se zveřejněním této závěrečné práce ve smyslu § 47b Zákona č. 111/1998 Sb. (O vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů) v platném znění.

V Opavě dne 20. července 2023

Ondřej Chlopčík

Poděkování

Velice rád bych zde poděkoval mému vedoucímu práce Mgr. Martinu Urbancovi, Ph.D. za jeho trpělivost, rady a výstižné komentáře při psaní této práce.

Obsah

Seznam obrázků	xv
Seznam tabulek	xvii
Úvod	1
Kapitola 1. Historický přehled a studie	3
1.1. Historický přehled a studie neutronových hvězd	3
1.2. Teoretické předpovědi a studie kvarkových hvězd	3
1.3. Pokroky a budoucí studie	4
Kapitola 2. Hmoty neutronových hvězd a fázové přechody	5
2.1. Baryonová hmota v neutronových hvězdách	5
2.2. Kvarková hmota v neutronových hvězdách	6
2.3. Stavové rovnice	7
2.3.1. Stavové rovnice neutronové hmoty	7
2.3.2. Stavové rovnice kvarkové hmoty	9
2.4. Fázové přechody	10
2.5. Tolman-Oppenheimer-Volkoffovy (TOV) rovnice	11
Kapitola 3. Vytvořený kód pro hledání fázových přechodů	15
3.1. Tvorba kódu	15
3.2. Struktura kódu pro nález průsečíku	16
3.3. Využití Beziérovky křivky a interpolace pro analýzu fázových přechodů	20
3.4. Vytváření datových sad a vizualizace	25
3.5. Implementace TOV rovnic	29
Kapitola 4. Výsledky a diskuze	35
Závěr	39
Literatura	41

Seznam obrázků

3.1	Tento obrázek popisuje podkapitola 5.2. <code>B_name</code> - nový název EoS rovnice pro kvarkovou hmotu a <code>NRAPR_name</code> - EoS pro baryonovou hmotu	17
3.2	Navazující část pro kód uvedený (Obrázkem 3.1), který hledá průsečík nahraných rovnic.	20
3.3	Část kódu nastavující parametry pro výpočet hranic grafu a interpolace bodů.	22
3.4	Na obrázku můžeme vidět výstup kódu pro kvarkový dataset 25.	24
3.5	Transformace dat.	25
3.6	Vykreslení grafu pro všechny křivky.	26
3.7	Výpočty dat pro každou Bezierovu křivku.	27
3.8	Vypočítávání hodnot <code>ed_2</code> , <code>nb_2</code> a uložení dataframe	28
3.9	Graf s vykreslenými dataframy jako <code>Result for Bezier curve</code>	28
3.10	Celkový vztah pro data kvarkové hmoty 25.	32
3.11	Přiblížení jednotlivých průběhů křivek pro dataset 25. kvarkové hmoty.	33
4.1	Modely hybridních neutronových hvězd pro různé EoS s různými fázovými přechody. $Bag = 2.5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ (vlevo nahoře), $Bag = 3.0 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ (vpravo nahoře), $Bag = 4.0 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ (vlevo dole), $Bag = 4.5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ (vpravo dole)	36
4.2	Přiblížení obrázku 4.1 na úseky fázových přechodů.	38

Seznam tabulek

3.1	Uspořádání dat kvarkových stavových rovnic. V datech baryonové hmoty se nenachází sloupec chemického potenciálu.	16
4.1	Zjištěné hodnoty průsečíků pro jednotlivé stavové rovnice kvarkové hmoty. V levém loupci máme stavové rovnice, kde B_{10} a dále udává $B_{10} = 1.0 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$	35

Úvod

Studium fázových přechodů v husté jaderné hmotě je motivováno jak současnými astronomickými pozorováními, tak současnými výsledky pozemních experimentů. Některá astronomická pozorování ukazují [1], že existují objekty tak lehké a tak malé, že by se mohlo jednat o tzv. podivnou hvězdu, tedy objekt, který se skládá primárně z *up*, *down* a *strange* kvarků. Výsledky kolaborace HADES ve středisku FAIR [2] ukazují, za jakých termodynamických podmínek by mohlo docházet k přechodu z neutronové hmoty na kvarkovou.

Naším cílem bude studovat v jednoduchém přiblížení fázové přechody z baryonové hmoty na kvarkovou. Především zjistit, jaký dopad má přítomnost a velikost smíšené fáze na maximální hmotnost neutronových hvězd s kvarkovými jádry.

Tato práce je strukturovaná následovně: v první kapitole se lehce zmiňuji o historickém přehledu a studii neutronových a kvarkových hvězd. Poté se zaměřím na hmotu, ze které jsou tyto hvězdy složeny. Dále proberu stavové rovnice a fázové přechody pro vybrané typy hmot. Tato část se už dotýká mé práce, ve které vytvářím kód, který má za úkol najít ve stavových rovnicích body fázových přechodů. Následně vytváří vlastní typy fázových přechodů pro nově vytvořené hybridní stavové rovnice. Nové stavové rovnice s vedoucím práce využijeme při řešení strukturních rovnic a konstruueme modely hybridních hvězd. Vytvořené hybridní hvězdy zobrazíme v M - R diagramech a v poslední kapitole tyto výsledky probereme pro čtyři různé hybridní stavové rovnice.

Kapitola 1

Historický přehled a studie

1.1. Historický přehled a studie neutronových hvězd

Neutronové hvězdy, které poprvé navrhli Walter Baade a Fritz Zwicky v roce 1933 [3], sehrály klíčovou roli v našem porozumění extrémních podmínek vesmíru. Tyto kompaktní objekty vznikají z pozůstatků supernov masivních hvězd. Pauliho vylučovací princip umožňuje existenci neutronových hvězd tím, že dává vzniknout novému typu tlaku - tzv. tlaku degenerovaných neutronů, který podpírá neutronové hvězdy proti gravitačnímu kolapsu [4].

V roce 1967 objevili Jocelyn Bell Burnell a Antony Hewish pulsary, rychle rotující neutronové hvězdy vysílající pravidelné pulsy radiálních vln [5]. Za tento objev byla udělena Nobelova cena v roce 1974 pouze Antony Hewishovi, ikdyž primárně objevila pulsary Jocelyn Bell Burnell. Jejich společná práce potvrdila teoretické předpovědi o neutronových hvězdách. Další pozorovací studie umožnily více porozumět struktuře, chování a vlivu neutronových hvězd na jejich okolí [6].

Přestože jsou jejich rozměry malé, průměrně okolo jedenácti kilometrů v poloměru, neutronové hvězdy mají typickou hmotnost větší než slunce $M = 1.4M_{\odot}$. To vede k neuvěřitelně vysokým průměrným hustotám v řádech $10^{14}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, tak vysokých, že uvnitř neutronových hvězd by mohly existovat exotické stavy hmoty, jako jsou hyperony, volné kvarky nebo Boseho-Einsteinovy kondenzáty [7].

1.2. Teoretické předpovědi a studie kvarkových hvězd

Studium kvarkových hvězd se vyvinulo jako rozšíření zkoumání neutronových hvězd. Jak už název napovídá, tato hypotetická tělesa jsou složena z kvarků. Konkrétně z kvarků typu *up*, *down* a *strange* [8].

Existence kvarkových hvězd je úzce spojena s hypotézou barevné supravodivosti a vlastnostmi kvantové chromodynamiky (QCD), teorie popisující silnou interakci. Představa barevné supravodivosti předpokládá, že při extrémně vysokých hustotách se kvarky mohou spárovat a vytvořit supravodivou fázi [7]. Tyto teoretické podmínky by mohly existovat v jádru velmi hustých neutronových hvězd, což by vedlo k vytvoření kvarkové hmoty, tedy hybridních a kvarkových hvězd.

Detekce kvarkových hvězd je výzvou kvůli jejich předpokládané podobnosti s neutronovými hvězdami v pozorovatelných charakteristikách. Potenciální existence kvarkových hvězd proto zůstává spekulativní [9]. Přesto výzkum pokračuje jak v oblasti pozorovací astronomie, tak v oblasti teoretické fyziky, aby se určilo, zda tyto exotické objekty existují a jaké mohou mít vlastnosti.

1.3. Pokroky a budoucí studie

Pokrok v technologiích, jako je zdokonalení teleskopů a lepší detekce gravitačních vln, výrazně zlepšil možnost studovat potenciál kvarkových a neutronových hvězd. Detekce srážek neutronových hvězd, byla objevena pomocí gravitačních vln v roce 2017 (GW170817), která otevřela nové způsoby studia těchto objektů [10].

Další studie srážek neutronových hvězd a jejich gravitačních vln mohou poskytnout potřebné informace k finálnímu určení, zda kvarkové hvězdy existují. Navíc přesnější výpočty vztahující se k vlastnostem QCD při extrémních hustotách, by mohly dále objasnit potenciální existenci a charakteristiky kvarkových hvězd [11].

Kapitola 2

Hmoty neutronových hvězd a fázové přechody

Studium neutronových hvězd nám poskytuje jedinečný pohled na povahu hmoty za extrémních podmínek. Tyto pozůstatky masivních hvězd, vzniklé jejich gravitačním kolapsem během událostí, které nazýváme supernovy, dosahují ve svých jádrech hustoty několikrát vyšší než jsou hustoty v atomových jádrech. Takové podmínky nemají v pozorovatelném vesmíru obdoby, vedou ke složitým a z velké části nezkoumaným stavům hmoty. Tyto jsou úzce spojeny se širokou škálou jevů, včetně stavových rovnic hmoty a fázových přechodů, které se mohou za těchto podmínek vyskytnout [6].

2.1. Baryonová hmota v neutronových hvězdách

Neutronové hvězdy se primárně skládají z baryonové hmoty, konkrétně z neutronů, s drobným množstvím protonů a elektronů pro udržení nábojové neutrality a β - rovnováhy [6]. Naše představy o této hmotě pocházejí z pozemských experimentů v oblasti jaderné fyziky. V těchto experimentech se studují interakce částic, například nukleonů, vzájemné interakce neutronů a další více částicové interakce. Tato teoretická a někdy experimentálně ověřená znalost interakcí částic nám umožňuje sestavit stavové rovnice pro tuto hmotu.

Uvnitř vnějších vrstev neutronové hvězdy je hmota uspořádána do "mřížkové" struktury, kterou nazýváme kůrou neutronové hvězdy. Kůra se především skládá z atomových jader ponořených do degenerovaného elektronového plynu. Když se ponoříme hlouběji, pod kůru, narazíme na vnitřní jádro neutronové hvězdy, kde hustoty přesahují hustoty jaderné saturace. Hustota saturace je přibližně 0.16 nukleonů na kubický femtometr (fm^{-3}) [6].

V těchto extrémních podmínkách přestává běžná hmota, jak ji známe, existovat. Neutrony, protony a elektrony se slévají do jednotné polévky nukleonů, čímž vytvářejí neutronovou hmotu. Tento přechod z mřížkové struktury do jednotného

moře částic v jádře by měl být plynulý, řízený rostoucím tlakem s rostoucí hloubkou pod povrchem [6].

Stavová rovnice (EoS) této neutronové hmoty je zásadní pro určení globálních vlastností neutronových hvězd, včetně jejich hmotností a poloměrů. Za těchto extrémních hustot, propojuje EoS tlak a hustotu energie neutronové hmoty a zachycuje základní aspekty silné jaderné síly [12]. Přestože v posledních letech došlo k významnému pokroku, přesná EoS neutronové hmoty za těchto podmínek zůstává nejistá.

Porozumění chování a vlastností baryonové hmoty v neutronových hvězdách nám nejen umožňuje předpovědět a interpretovat pozorování související s neutronovými hvězdami, ale také poskytuje cenný vhled do povahy silných silových interakcí v režimu, který je v současné době pozemským experimentům nedostupný [6, 12].

2.2. Kvarková hmota v neutronových hvězdách

V jádrech neutronových hvězd, kde hustota dosahuje a přesahuje hustotu jaderné saturace, se může baryonová hmota přeměnit v kvarkovou hmotu. Tento přechod je charakteristický pro tzv. kvarkové hvězdy. Dříve se myslelo, že takovéto objekty jsou spíše teoretické, ale nedávné pozorování vysoce hmotných neutronových hvězd a pokroky v teoretických modelech naznačují, že kvarková hmota by mohla hrát roli v extrémně hustých prostředích [13].

Kvarková hmota je tvořena fundamentálními částicemi, které tvoří hadrony jako jsou například protony a neutrony. Za normálních podmínek jsou kvarky uvězněné v hadronech díky silné interakce. Tento fenomén je známý jako uvěznění kvarků. Za extrémních hustot a teplot, jaké panují v jádrech neutronových hvězd, se hadrony mohou "rozpustit" a uvolnit kvarky, čímž vzniká kvark-gluonové plazma [14].

Podobně jako v případě baryonové hmoty, také kvarkovou hmotu popisují stavové rovnice. V praxi je však její výpočet náročnější kvůli nutnosti zahrnout QCD (kvantovou chromodynamiku), ve které hraje roli interakce mezi kvarky a gluony [14].

Různé modely kvarkové hmoty předpokládají různé stavové rovnice a předpovídají různé výsledky pro vlastnosti kvarkových hvězd. Například námi používaný MIT bag model, navržený na Massachusettském technologickém institutu, je jedním ze základních modelů pro kvarkovou hmotu [7]. V modelu se předpokládá, že jsou kvarky uvnitř určitého uzavřeného prostoru, nazývaným "taškou", ze kterého nemohou uniknout. Tento model je charakterizován bagovou kon-

stantou *Bag*, která představuje energetickou bariéru držící kvarky uvnitř "tašky". Tato je někdy interpretována jako energetická hustota, která je potřebná k vytvoření prostoru, ve kterém mohou kvarky existovat jako volné částice. Bagova konstanta tedy reprezentuje jakýsi rozdíl mezi energetickou hustotou standardního vakua a vakua kvantové chromodynamiky [7].

Dále model vychází z konceptu asymptotické svobody v silné interakci, tzn. změny interakce mezi kvarky. Kvarky se stávají slabšími s rostoucí hustotou a naopak silnějšími, když se od sebe vzdalují. Také předpovídá u kvarkových hvězd menší poloměr za stejných hmotností než mají neutronové hvězdy [9].

2.3. Stavové rovnice

Stavová rovnice EoS je vztah pro jakoukoli formu hmoty, která popisuje její termodynamické veličiny. Přesněji tlak P , hustotu energie ε a teplotu T . Pro studium neutronových hvězd se jedná o zásadní teoretický koncept s možností zanedbat teplotu. Klíčovou roli zde mají následující veličiny:

- **Tlak (P):** v kontextu EoS je tlak síla vyvíjená hmotou na jednotkovou plochu. Je určen přenosem hybnosti částic při srážkách s hranicemi na infinitesimálně malém elementu.
- **Hustota energie (ε):** hustota energie je množství energie uložené v jednotkovém objemu prostoru. Zahrnuje jak energii klidové hmotnosti částic, tak jejich kinetickou a interakční energii.
- **Hustota částic (n):** hustota je počet částic na jednotkový objem. Je to míra "kompaktnosti" dané hmoty v objemu. V případě neutronových hvězd se často hovoří o baryonové hustotě n_{bar} .

2.3.1. Stavové rovnice neutronové hmoty

Analyzovat stav hmoty v prostředích s extrémní hustotou, jako jsou neutronové hvězdy, vyžaduje použití stavových rovnic. Tyto rovnice umožňují popsat vztahy mezi klíčovými fyzikálními veličinami. Pro sestavení EoS neutronové hmoty je třeba uvést následující definice a koncepty.

Zavedeme symboly N_e , N_n a N_p pro označení počtu elektornů, neutronů a protonů v dané hmotě. Hustoty počtu těchto částic budeme reprezentovat jako n_e , n_n a n_p . Tyto veličiny jsou navzájem propojeny rovnicí

$$N_x = n_x dV \quad \text{pro } x \in \{e, n, p\}, \quad (2.1)$$

kde x se vztahuje na neutrony, protony a elektrony a dV je vlastní objem zájmu. Pro baryonovou hmotu definujeme $n_{\text{bar}} = n_n + n_p$.

Celkovou hustotu energie na částici lze definovat jako

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{bar}}(n_{\text{bar}}, f_p) + \varepsilon_e(n_e), \quad (2.2)$$

kde f_p je protonová frakce definovaná jako $f_p = n_p/n_{\text{bar}}$. Zohlednit asymetrii mezi počtem neutronů a protonů můžeme pomocí parametru symetrie ζ

$$\zeta = \frac{n_n - n_p}{n_{\text{bar}}} = 1 - 2f_p. \quad (2.3)$$

Přeformulujeme rovnici 2.2 jako

$$\varepsilon = n_{\text{bar}}E_{\text{bar}}(n_{\text{bar}}, \zeta) + \varepsilon_e(n_e), \quad (2.4)$$

kde $E_{\text{bar}}(n_{\text{bar}}, \zeta)$ je energie k jednomu baryonu. Dále můžeme rovnici 2.4 upravit do podoby

$$\varepsilon = n_{\text{bar}}[E_{\text{bar}}(n_{\text{bar}}, 1) - 4x_p(1 - x_p)S_0(n_{\text{bar}}, \zeta)] + \varepsilon_e(n_e). \quad (2.5)$$

V rovnici jsme použili symetrizační energii $S_0(n_{\text{bar}}, \zeta)$ definovanou

$$S_0(n_{\text{bar}}, \zeta) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial \zeta^2} \right|_{\zeta=0}. \quad (2.6)$$

Konečně můžeme zapsat vztah pro chemický potenciál μ . Chemický potenciál se používá v termodynamice a statistické fyzice k popisu energetických změn, které nastávají změnou počtu částic v systému. Z pohledu částicové fyziky je chemický potenciál často interpretován jako "energie potřebná k přidání částice do systému".

$$\mu_x = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_x} \quad (2.7)$$

V mé práci jsem využíval EoS rovnic pro baryonovou hmotu zvanou NRAPR [15]. Tato rovnice je založena na detailním popisu interakcí mezi nukleony (neutrony a protony), které tvoří většinu hmoty v neutronových hvězdách. Rovnice je zvláště cenná, protože je schopna dobře popsat jadernou hmotu v širokém rozsahu hustot. Od hustot typických pro atomová jádra až po hustoty nacházející se v jádru neutronových hvězd, které mohou být několikrát vyšší. To je

velice důležité, protože chování hmoty v těchto extrémních podmínkách není plně pochopeno a stavové rovnice NRAPR poskytuje dobrý teoretický rámec pro pochopení tohoto chování.

Rovnice je často využívána v astrofyzice kvůli své schopnosti reprodukovat pozorování a měření neutronových hvězd, jako jsou například jejich hmotnosti a poloměry.

2.3.2. Stavové rovnice kvarkové hmoty

Stavová rovnice kvarkové hmoty je klíčová pro popis těch nejvíce kompaktních astrofyzikálních objektů, jako jsou kvarkové hvězdy. Předpokládáme, že tyto objekty nabývají tak extrémních tlaků, pro které se zdá být výhodnější, aby látka přešla z baryonové na kvarkovou. V další kapitole popisují tvorbu mého kódu, ve kterém počítám s rovnicí z MIT Bagového modelu, který jsem již zmínil v kapitole 2.2.

Nyní uvedu EoS rovnici z Bagového modelu pro kvarkovou hmotu, která se důkladně rozebírá v [7]. Pro tuto rovnici se uvažuje stejné množství hustot kvarků *up*, *down* a *strange*.

$$n_u = n_d = n_s = n_x \quad \text{pro} \quad n_e = 0 \quad (2.8)$$

Dále se v modelu počítá s hustotou kinetické energie, která se dostane použitím vzorce pro hustotu energie ultra-relativistického Fermiho plynu v kombinaci s dokonalou symetrií "barvy a příchutě" našeho systému [7]

$$\varepsilon_{\text{kinet}} = bn_x^{4/3}, \quad b = \left(\frac{9}{4}\right)\pi^{2/3}\hbar c, \quad (2.9)$$

která je potřebná, spolu s bagovou konstantou *Bag*, k určení celkové hustoty energie

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{kinet}} + Bag. \quad (2.10)$$

Využijeme vztahu pro chemický potenciál

$$\mu_x = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_x} = \frac{\varepsilon + P}{n_x}. \quad (2.11)$$

Potom se už tlak dá snadno získat [14]

$$P = n_x^2 \frac{d}{dn_x} \left(\frac{\varepsilon}{n_x} \right) = \frac{1}{3}bn_x^{4/3} - Bag = \frac{1}{3}(\varepsilon - 4Bag). \quad (2.12)$$

V poslední rovnici můžeme vidět, že tlak nabyde nulové hodnoty pro $\varepsilon = 4Bag$, to nám říká že, konstanta hraje svoji roli už za nulového tlaku. Jednotlivé stavové rovnice používané v této práci, se od sebe touto konstantou liší a díky nim dochází k různým výsledkům.

2.4. Fázové přechody

Přechody látek z jednoho skupenství do druhého jsou dnes každému známé. Všichni je pozorujeme téměř každodenně, když si vaříme vodu pro kafe. Termodynamika se těmto změnám věnuje. Pro nás jsou tyto přechody velmi důležité, protože k této práci potřebujeme jejich základní myšlenky.

V práci řeším fázový přechod baryonové látky na látku kvarkovou [12]. Pro tento přechod používám vztah chemického potenciálu (μ) v závislosti na tlaku (P).

$$\mu = \mu(P) \quad (2.13)$$

Vztah použijeme na obě látky. Chemický potenciál kvarkové hmoty označíme s indexem (kvar) a pro baryonovou s indexem (bar).

$$\mu_{\text{bar}} = \mu_{\text{bar}}(P) \quad (2.14)$$

$$\mu_{\text{kvar}} = \mu_{\text{kvar}}(P) \quad (2.15)$$

Abychom našli rovnováhu mezi různými stavy, musí v látkách nastat bod, ve kterém se překrývají. V tomto bodě fázové rovnováhy nabudou látky stejného tlaku a chemického potenciálu, který odpovídá jejich fázovému přechodu. Tabulku hodnot pro všechny rovnovážné body uvádím v kapitole 4.

$$\mu_{\text{bar}}(P_c) = \mu_{\text{kvar}}(P_c) \quad (2.16)$$

Vzhledem k tomu, že se na chemický potenciál dá dívat jako na Gibbsovu volnou energii na mol., mohli bychom psát

$$g_{\text{bar}} = g_{\text{kvar}} \quad (2.17)$$

U fázových přechodů obecně pozorujeme bod zlomu, ve kterém látka přechází na jinou. Z fyziky víme, že látky reagují na okolní podmínky svými stavy na základě energetické výhodnosti. V našem případě bude pro tlak $P < P_c$ látka ve formě baryonů a pro tlak $P > P_c$ bude látka ve formě kvarků. V dalším kroku

budeme uvažovat o smíšené fázi, která bude existovat mezi tlakem αP_c a tlakem βP_c , kde $\alpha < 1$ a $\beta > 1$ budou námi zvolené parametry. Jedním z cílů práce je zkoumat vliv parametru α a β na vlastnosti neutronových hvězd.

2.5. Tolman-Oppenheimer-Volkoffovy (TOV) rovnice

V této části se budu zabývat vnitřním Schwarzschildovým řešením, což je model statické a izotropní hmoty, tedy hmoty, která se nehýbe a její vlastnosti jsou stejné ve všech směrech. Předpokládáme, že hmota je dokonalá tekutina, to znamená, že tekutina nemá viskozitu a není vodivá.

Její látka je popsána tenzorem energie-hybnosti, který má tvar

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

kde ε je hustota energie tekutiny, P je tlak, u^μ je čtyřrychlost a $g_{\mu\nu}$ je metrický tenzor. V našem případě počítáme s $G = c = 1$, potom stacionární systém je $u^\mu = (u^t, 0, 0, 0)$, kde u^t je určen podmínkou normalizace $u^\mu u_\mu = -1$.

Z hlediska sférických souřadnic (t, r, θ, ϕ) je vnitřní Schwarzschildova metrika daná vztahem

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.19)$$

kde $e^{2\Lambda(r)} = 1/(1 - 2m(r)/r)$ je faktor škály pro radiální část metriky, $m(r)$ je hmotnost obsažená v kouli o poloměru r , $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ je diferenciál sférického úhlu a $\Phi(r)$ je gravitační potenciál, který závisí na poloměru. Výraz $e^{2\Phi(r)}$ je faktor škály pro časovou část metriky, který závisí na gravitačním potenciálu na dané vzdálenosti r .

Pro kovarianí složky tenzoru energie-hybnosti $T_{\mu\nu}$ můžeme psát

$$T_{tt} = (\varepsilon + P)u_t u_t + P g_{tt} = -e^{2\Phi} \varepsilon \quad (2.20)$$

$$T_{rr} = P g_{rr} = P/(1 - 2m(r)/r) = P e^{2\Lambda} \quad (2.21)$$

$$T_{\theta\theta} = P g_{\theta\theta} = P r^2 \quad (2.22)$$

$$T_{\phi\phi} = P g_{\phi\phi} = P r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.23)$$

Zde platí, že $u_t u_t = e^{2\Phi}$ a $u_r = u_\theta = u_\phi = 0$. Ostatní složky jsou nulové. Ještě jednou zavedeme metriku, tentokrát v maticovém zápisu

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\frac{2m(r)}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

K dalšímu kroku potřebujeme zavést Christoffelovy symboly druhého druhu. Pro metriku jsou vypočteny ze vztahu

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.25)$$

Ricciho tenzor $R_{\mu\nu}$ definovaný jako

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (2.26)$$

ve kterém jsme provedli součty přes všechny hodnoty σ a λ . Dále definujeme skalární křivost R neboli "Ricciho skalár" jako

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Konečně máme vše potřebné k Einsteinovu tenzoru $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$.

Nyní můžeme přejít k Einsteinovým rovnicím $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, ve kterých porovnáme složky $G_{\mu\nu}$ a $T_{\mu\nu}$. Srovnáním levých a pravých stran Einsteinových rovnic pro kapalinu v klidu získáme diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \\ \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ze zákona zachování tenzoru energie hybnosti $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ získáme vtaž

$$\frac{dP}{dr} = -(\varepsilon + P) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{(\varepsilon + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}. \quad (2.29)$$

Rovnice 2.28 a 2.29 jsou tři základní TOV rovnice. Popisují vztah mezi hustotou energie, tlakem, gravitačním potenciálem a poloměrem uvnitř statické sféricky symetrické hvězdy. Měli bychom je řešit s vhodnými počátečními podmínkami pro konkrétní hvězdu, kterou modelujeme. K tomu potřebujeme stavové

rovnice, které jsme řešili v kapitole 2.3.2. Nyní máme uvedeno vše potřebné k této práci. V další kapitole se budu věnovat popisu mého kódu, ve kterém používám stavové rovnice a hledám fázové přechody. S jejich pomocí vypočítávám stavové rovnice pro hybridní hmotu. Ty poté následně s vedoucím práce používáme k modelování neutronových hvězd.

Kapitola 3

Vytvořený kód pro hledání fázových přechodů

Hlavním úkolem této práce bylo nalézt fázové přechody stavových rovnic kvarkové a hadronové hmoty. V našem přístupu jsme pracovali se stavovou rovnicí v podobě chemického potenciálu jako funkce tlaku. Tato volba je dána tím, že budeme výsledné stavové rovnice používat při řešení hydrostatické rovnováhy. Tlak tedy volíme jako nezávislou proměnnou a požadujeme, aby za daného tlaku byla přípustná pouze jedna hodnota chemického potenciálu. K vyřešení tohoto problému jsem vytvořil kód v programovacím jazyce Python, který hledá průsečík mezi těmito rovnicemi. Tento kód detekuje fázový přechod hmot v závislosti $\mu(P)$ pro hadronovou a kvarkovou hmotu. Nejprve uvažujeme, že mezi hadronovou a kvarkovou hmotou existuje ostrá hranice. V následujícím kroku budeme uvažovat o smíšené fázi. Tato fáze se nachází v okolí spočteného průsečíku definovaného intervalem, kde funkci $\mu(P)$ budeme modelovat takovým způsobem, aby hladce navazovala na stavovou rovnici hadronové hmoty na levém okraji uvažovaného intervalu a na stavovou rovnici kvarkové hmoty na pravém okraji uvažovaného intervalu.

Programovací jazyk Python jsem si vybral hlavně kvůli jeho databázovým systémům, snadné čitelnosti syntaxe, dynamickému typování a rozsáhlé knihovně modulů.

Celý kód jsem vytvářel v prostředí webové aplikace Jupyter Notebook, která umožňuje uživatelům psát kód v mnoha různých programovacích jazycích.

3.1. Tvorba kódu

Nejprve mi byla na základě zadání vedoucím práce, poskytnuta sada rovnic. Celkem jsem obdržel 17 různých stavových rovnic kvarkové hmoty, lišících se od sebe Bagovou konstantou a jednu stavovou rovnici pro baryonovou hmotu. Jednotlivé rovnice dat měly formu tabulek. Kvarkové rovnice hmoty mají čtyři

sloupce a 1 000 řádků. Baryonová rovnice má pouze 187 řádků a o jeden sloupec méně, který musíme dopočítat. Pro ukázkou a lepší představu o uspořádání tabulek uvádím tabulku 3.1.

Hustota hmoty	Tlak	Hustota baryonů	Chemický potenciál
[g cm ⁻³]	[dyne cm ⁻²]	[cm ⁻³]	[g]
1.000000e+17	2.965893e+37	2.122174e+40	6.267159e-24
9.954008e+16	2.952114e+37	2.114831e+40	6.259922e-24
9.908228e+16	2.938399e+37	2.107514e+40	6.252694e-24
.	.	.	.
.	.	.	.
1.004620e+15	1.384210e+33	5.443681e+38	1.848309e-24
1.000000e+15	0.000000e+00	5.418664e+38	1.845473e-24

Tabulka 3.1. Uspořádání dat kvarkových stavových rovnic. V datech baryonové hmoty se nenachází sloupec chemického potenciálu.

Na začátku jsem si vyzkoušel napsat kód, který načte data a vykreslí graf chemického potenciálu a tlaku, ve kterém byly hodnoty z tabulek zobrazeny body. Tento první pokus jsem dělal, zejména abych viděl, jestli ve všech rovnicích hmot jde najít průsečík. Touto zkouškou jsem zjistil, že u některých rovnic průsečík nenajdeme. V následujících stránkách budu postupně vysvětlovat a uvádět svůj programový kód, který slouží k přesnému výpočtu průsečíku.

3.2. Struktura kódu pro nález průsečíku

Celý kód je strukturován do několika částí, které slouží k různým úkolům. Nejdříve se načítají potřebné knihovny, které jsou pro kód zásadní. V této části se nachází:

- **pandas:** knihovna pro manipulaci s datovými strukturami, která umožňuje snadnou práci s daty různých formátů. Pandas nabízí také rychlé a flexibilní datové struktury, které usnadňují manipulaci s relačními nebo označenými daty.
- **numpy:** knihovna pro vědecké výpočty, která poskytuje podporu pro velké, multi-dimenzionální pole a matice, spolu s velkou sbírkou matematických funkcí na tato pole.

- `shapely`: knihovna pro manipulaci a analýzu prostorových dat. Shapely umožňuje vytváření, manipulaci a analýzu 2D geometrických objektů, jako jsou body, křivky a plochy.
- `matplotlib`: knihovna pro vytváření statických, animovaných a interaktivních vizualizací v Pythonu. Matplotlib je velmi konfigurovatelná a umožňuje vytvářet různé typy grafů a diagramů.

Po načtení těchto knihoven začíná skutečná práce s daty. Nejprve se data načítají z datových souborů. Kód otevírá dané soubory, čte data a parsuje je do formátu CSV. Tento proces je důležitý, protože formát CSV je snadno manipulovatelný a lze jej efektivně načíst do datových rámců knihovny `pandas`. Tento krok je nezbytný pro další analýzy a výpočty.

Data jsou následně načtena do datových rámců pomocí knihovny `pandas`. Datový rámec je dvoudimenzionální tabulková struktura, která může obsahovat data různých typů (např. celá čísla, řetězce, plovoucí čísla, python objekty a další) a umožňuje rychlou manipulaci s daty, jako je filtrování, třídění a další operace (obrázek 3.1).

```
import pandas as pd
import numpy as np
from shapely.geometry import LineString, Point
import matplotlib.pyplot as plt

#načtení dat
B_name = "stavové rovnice - neutr. hmota/eos_B25_as0"
NRAPR_name = "stavové rovnice - neutr. hmota/eos_NRAPR_low"

# Parse dat to csv
with open(f'{B_name}.dat', 'r') as f:
    data = [".join(line.strip().split()) + "\n" for line in f]
    with open(f'{B_name}.csv', 'w') as out_f:
        out_f.write("x1;x2;x3;y\n")
        out_f.writelines(data)

with open(f'{NRAPR_name}.dat', 'r') as f:
    data = [".join(line.strip().split()) + "\n" for line in f]
    data = data[2:]
    with open(f'{NRAPR_name}.csv', 'w') as out_f:
        out_f.write("x1;x2;x3\n")
        out_f.writelines(data)

b = pd.read_csv(f'{B_name}.csv', delimiter=';')
nrapr = pd.read_csv(f'{NRAPR_name}.csv', delimiter=';')
```

Obrázek 3.1. Tento obrázek popisuje podkapitola 5.2. `B_name` - nový název EoS rovnice pro kvarkovou hmotu a `NRAPR_name` - EoS pro baryonovou hmotu

Po načtení dat z datových souborů bylo třeba vypočítat chemický potenciál pro jednotlivé stavy hmot. Výpočet chemického potenciálu byl založen na fyzikálním vzorci, který je nezbytný pro popis kvarkových a hadronových stavových rovnic a modelů neutronových hvězd. Při jeho výpočtu jsem musel předpokládat určité fyzikální podmínky, které nemusí platit ve všech situacích.

Vzorec pro výpočet chemického potenciálu (μ) na jeden baryon je následující

$$\mu = \frac{\varepsilon + \frac{P}{c^2}}{n_{bar}}, \quad (3.1)$$

- ε je hustota energie, jednotky g.cm^{-3} ,
- P je tlak, jednotky dyne.cm^{-2} ,
- c je rychlost světla, jednotky cm.s^{-1} , a
- n_{bar} je hustota baryonů, jednotky cm^{-3} .

Rychlost světla ve vzorci je na druhou, protože musím vyrovnat jednotky tlaku (dyne.cm^{-2}) s jednotkami hustoty energie (g.cm^{-3}). Vyjádřením chemického potenciálu takto dostanu hodnotu v jednotkách hmotnosti, tedy v gramech.

Tento kód používá výše uvedený vzorec pro daný výpočet (μ) a aplikuje ho na naše data. Zdrojový kód této části výpočtu je následující:

```
c_2 = 29979245800**2
nrapr['y'] = ((nrapr['x1']
+ (nrapr['x2'] / c_2)) / nrapr['x3']).astype(float).
```

Dále následuje fáze řazení hodnot v datovém rámci NRAPR a B podle tlaku 'x2'. Toto řazení je nezbytné pro pozdější analýzu průsečíků. Tato část kódu je zobrazena níže:

```
nrapr.sort_values(by=['x2'], inplace=True)
b.sort_values(by=['x2'], inplace=True)
```

Poté následuje fáze vytváření čárových segmentů, které jsou tvořeny sousedícími body v našem datasetu. Tyto segmenty pak využívám k vyhledání průsečíků mezi kvarkovou a baryonovou hmotou.

```
nrapr_segments = []
b_segments = []
for i in range(len(nrapr) - 1):
    nrapr_segments.append(LineString([(nrapr.iloc[i]['x2'],
nrapr.iloc[i]['y']), (nrapr.iloc[i + 1]['x2'],
```

```
    nrapr.iloc[i + 1]['y']]))))  
for i in range(len(b) - 1):  
    b_segments.append(LineString([(b.iloc[i]['x2'],  
    b.iloc[i]['y']), (b.iloc[i + 1]['x2'],  
    b.iloc[i + 1]['y'])]))
```

Dalším krokem je kontrola průsečíků mezi segmenty hmot. Toto je základní část našeho kódu, která nám poskytne bod, kde se naše stavové rovnice setkávají.

```
intersection = None  
end = False  
for i in nrapr_segments:  
    for j in b_segments:  
        if i.intersects(j):  
            intersection = i.intersection(j)  
            end = True  
            break  
    if end:  
        break
```

Pokud existuje průsečík, kód vypíše jeho souřadnice. Pokud ne, kód vypíše zprávu, že nebyl žádný průsečík nalezen.

```
if intersection is not None:  
    print(intersection.x, intersection.y)  
else:  
    print("No intersection found")
```

Na závěr se resetují indexy datových rámců NRAPR a B pro další použití.

```
nrapr.reset_index(inplace=True)  
b.reset_index(inplace=True)
```

Tyto operace jsou základními kroky v mém kódu pro analýzu kvarkových a baryonových stavů hmot a hledání jejich průsečíků. Kód efektivně využívá knihovny pandas, numpy a shapely pro manipulaci s daty, výpočet chemického potenciálu a hledání průsečíků mezi stavovými rovnicemi.

Pro lepší vizualizaci popsaného kódu přidávám jeho obrázek (Obrázek 3.2).

```

c_2 = 29979245800**2
nrapr['y'] = ((nrapr['x1'] + (nrapr['x2'] / c_2)) / nrapr['x3']).astype(float)

nrapr.sort_values(by=['y'], inplace=True)
b.sort_values(by=['y'], inplace=True)

# Vytvoření line segmentů
nrapr_segments = []
b_segments = []
for i in range(len(nrapr) - 1):
    nrapr_segments.append(LineString([(nrapr.iloc[i]['x2'], nrapr.
    ↪iloc[i]['y']), (nrapr.iloc[i + 1]['x2'], nrapr.iloc[i + 1]['y'])]))
for i in range(len(b) - 1):
    b_segments.append(LineString([(b.iloc[i]['x2'], b.iloc[i]['y']), (b.ilo
    ↪c[i + 1]['x2'], b.iloc[i + 1]['y'])]))

# Kontrola intersekce
intersection = None
end = False
for i in nrapr_segments:
    for j in b_segments:
        if i.intersects(j):
            intersection = i.intersection(j)
            end = True
            break
    if end:
        break

```

Obrázek 3.2. Navazující část pro kód uvedený (Obrázkem 3.1), který hledá průsečík nahraných rovnic.

3.3. Využití Beziérovky křivky a interpolace pro analýzu fázových přechodů

V předchozí části jsem identifikoval průsečík mezi stavy hmot, který představuje bod, kde se obě setkávají. Teď se zaměřím na další analýzu tohoto průsečíku pomocí Bézierovy křivky a interpolace bodů v blízkosti průsečíku.

Bézierova křivka je matematický nástroj používaný v počítačové grafice a dalších oblastech k vytváření hladkých křivek. Křivka je definována skrze tři body: počáteční bod, koncový bod a jeden kontrolní bod. Křivka je pak tvořena tak, že je na začátku "uchycena" k počátečnímu bodu, následně je "uchycena" ke kontrolnímu bodu a nakonec je "uchycena" ke koncovému bodu. Výsledkem je hladká křivka, která tyto body spojuje.

V tomto případě použiji Bézierovu křivku k modelování fázového přechodu mezi naším párem hmot v blízkosti průsečíku. Funkce pro výpočet Bézierovy křivky je definována následovně:

```
def bezier_curve(t, p0, p1, p2):  
    return (1 - t)**2 * p0 + 2 * (1 - t) * t * p1 + t**2 * p2
```

Tato funkce bere jako vstup tři body (p0, p1, p2) a parametr t. Bod p0 je počáteční bod, bod p2 je koncový bod a bod p1 je kontrolní bod. Parametr t je lineární interpolant, který se pohybuje od 0 do 1. Když je t rovno 0, funkce vrátí počáteční bod (p0). Když je t rovno 1, funkce vrátí koncový bod (p2). Pro hodnoty t mezi 0 a 1 vrátí funkce body na Bézierově křivce mezi p0 a p2.

Následně používám tuto funkci v další funkci, která vytváří Bézierovu křivku pro spojení bodů v datech:

```
def connect_interpolated_points(x_values, y_values,  
control_point_ratio=0.07, color='r--', label=None,  
control_point_shift=0, linewidth=0.9):  
    p0 = np.array([x_values[0], y_values[0]])  
    p1 = np.array([x_values[1], y_values[1]])  
    p2 = np.array([x_values[2], y_values[2]])  
  
    control_point = p1 + control_point_ratio * (p2 - p0)  
    control_point[1] += control_point_shift  
  
    t = np.linspace(0, 1, 100)  
    curve = np.array([bezier_curve(t_, p0, control_point,  
p2) for t_ in t])  
    plt.plot(curve[:, 0], curve[:, 1], color, label=label,  
linewidth=linewidth)
```

Funkce `connect_interpolated_points` bere jako vstup pole hodnot x a y, které reprezentují body, jež chci spojit. Dále bere několik volitelných parametrů pro ovládání vzhledu křivky: poměr pro kontrolní bod (`control_point_ratio`), barvu křivky (`color`), popisek křivky (`label`), posun kontrolního bodu (`control_point_shift`) a šířku čáry křivky (`linewidth`).

Funkce nejprve vytvoří tři body p0, p1 a p2 ze vstupních hodnot x a y. Kontrolní bod pro Bézierovu křivku je pak vypočten jako průměr mezi p0 a p2, s možností posunu v ose Y. Křivka je pak vykreslena pomocí funkce `plt.plot`.

Při využití této funkce vytvářím Bézierovu křivku pro modelování fázového přechodu mezi kvarkovou a baryonovou hmotou v blízkosti průsečíku. Pomocí

této křivky můžeme vizualizovat hladký přechod mezi těmito dvěma stavy hmot a získat lepší představu o chování systému v této oblasti. Cílem práce bylo vyzkoušet různé šířky intervalů smíšené fáze. Konkrétně se jednalo o šest různých šířek (nejužší interval je $(0.99 - 1.01)P_c$ a nejširší interval je $(0.5 - 2.0)P_c$). Detaily dalších intervalů jsou zřejmé z kódu, kde nastavuji parametry pro výpočet hranic grafu a provádím interpolaci různých bodů (obrázek 3.3).

```
# set params
x, y = intersection.x, intersection.y
scaler_x = 0.75
scaler_y = 0.1
#####
x_left_line = 0.99 * x
x_right_line = 1.01 * x

x_left_line2 = 0.95 * x
x_right_line2 = 1.05 * x

x_left_line3 = 0.8 * x
x_right_line3 = 1.2 * x

x_left_line4 = 0.65 * x
x_right_line4 = 1.35 * x

x_left_line5 = 0.5 * x
x_right_line5 = 1.5 * x

x_left_line6 = 0.5 * x
x_right_line6 = 2 * x

y_left_line = np.interp(x_left_line, nrapr['x2'], nrapr['y'])
y_right_line = np.interp(x_right_line, b['x2'], b['y'])

y_left_line2 = np.interp(x_left_line2, nrapr['x2'], nrapr['y'])
y_right_line2 = np.interp(x_right_line2, b['x2'], b['y'])

y_left_line3 = np.interp(x_left_line3, nrapr['x2'], nrapr['y'])
y_right_line3 = np.interp(x_right_line3, b['x2'], b['y'])

y_left_line4 = np.interp(x_left_line4, nrapr['x2'], nrapr['y'])
y_right_line4 = np.interp(x_right_line4, b['x2'], b['y'])

y_left_line5 = np.interp(x_left_line5, nrapr['x2'], nrapr['y'])
y_right_line5 = np.interp(x_right_line5, b['x2'], b['y'])

y_left_line6 = np.interp(x_left_line6, nrapr['x2'], nrapr['y'])
y_right_line6 = np.interp(x_right_line6, b['x2'], b['y'])

# Calculate graph boundaries
x_left, x_right = x - scaler_x*x, x + scaler_x*x
y_left, y_right = y - scaler_y*y, y + scaler_y*y
```

Obrázek 3.3. Část kódu nastavující parametry pro výpočet hranic grafu a interpolace bodů.

První část kódu, označená jako *#set params*, nastavuje výchozí parametry pro následující operace. Tyto parametry zahrnují "měřítka" pro x a y souřadnice, které budou použity pro určení hranic grafu.

Dále v kódu jsou určeny počáteční a koncové hodnoty pro sedm lineárních interpolací na datech kvarkové a baryonové hmoty. Tyto interpolace jsou provedeny pomocí funkce `np.interp()`, která pro daný x bod vrací odpovídající y bod na křivce.

V našem případě jsou počáteční a koncové x hodnoty pro každou interpolaci stanoveny násobením souřadnice x průsečíku různými "měřítky". Pro každou z těchto interpolací jsou pak vypočteny odpovídající y hodnoty na kvarkové a baryonové křivce.

Příklad jednoho interpolovaného bodu je následující:

```
x_left_line = 0.5 * x
x_right_line = 1.5 * x

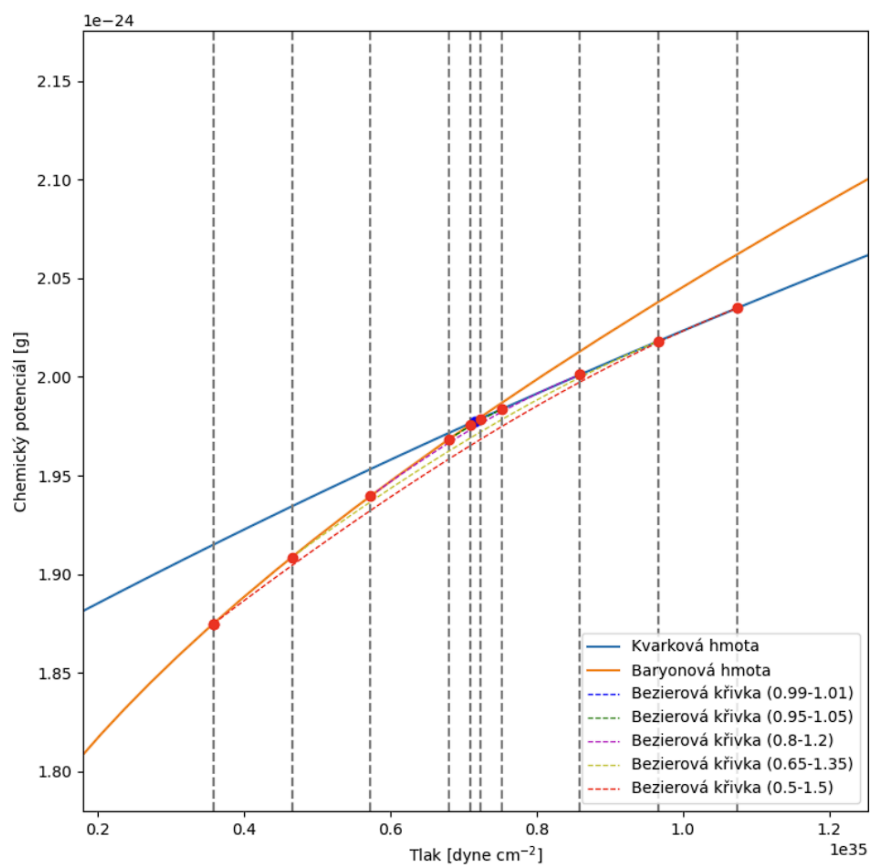
y_left_line = np.interp(x_left_line, nrapr['x2'], nrapr['y'])
y_right_line = np.interp(x_right_line, b['x2'], b['y'])
```

Zde jsou (`x_left_line`) a (`x_right_line`) definovány jako 0.5 a 1.5 krát x souřadnice průsečíku. Pro tyto body jsou pak vypočteny odpovídající y hodnoty na kvarkové a baryonové křivce pomocí funkce (`np.interp()`).

Tento postup je poté opakován 6x a objevuje se na několika místech později v textu pro různé "měřítka", čímž vytvářím sadu interpolovaných bodů.

Konečně, v sekci kódu označené jako *# Calculate graph boundaries* jsou vypočteny hranice grafu na základě hodnot průsečíku a předem definovaných "měřítek". Tyto hranice nám určují oblast, kterou chceme zobrazit v našem grafu.

Celkově mi kombinace Bézierovy křivky a interpolace bodů umožňuje vytvořit hladkou vizualizaci fázového přechodu mezi kvarkovou a baryonovou hmotou a pomáhá mi lépe porozumět chování tohoto systému v blízkosti průsečíku (obrázek 3.4)



Obrázek 3.4. Na obrázku můžeme vidět výstup kódu pro kvarkový dataset 25.

3.4. Vytváření datových sad a vizualizace

V další fázi práce (viz obrázek 3.5) provádíme novou transformaci dat s cílem připravit je pro finální vizualizaci.

```
def vytvorit_data(x_left_line, y_left_line, x_right_line, y_right_line):
    # Data z NRAPR do prvního interpol. bodu
    nrapr_left = nrapr[nrapr['x2'] <= x_left_line]

    # Beziérová křivka z prvního interpol bodu do druhého, složená z 1000 bodů a uložení dat.pole
    t = np.linspace(0, 1, 1000)
    p0 = np.array([x_left_line, y_left_line])
    p1 = np.array([x, y])
    p2 = np.array([x_right_line, y_right_line])
    curve_points = [bezier_curve(t_, p0, p1, p2) for t_ in t]
    curve = pd.DataFrame(curve_points, columns=['x2', 'y'])

    # Data z druhého interpol bodu a dál od B_name
    b_right = b[b['x2'] >= x_right_line]

    # Data od všech bodů
    result = pd.concat([nrapr_left, curve, b_right])
    return result, curve, nrapr_left, b_right

# Interval pro každou čáru
intervaly = [(x_left_line, y_left_line, x_right_line, y_right_line),
             (x_left_line2, y_left_line2, x_right_line2, y_right_line2),
             (x_left_line3, y_left_line3, x_right_line3, y_right_line3),
             (x_left_line4, y_left_line4, x_right_line4, y_right_line4),
             (x_left_line5, y_left_line5, x_right_line5, y_right_line5),
             (x_left_line6, y_left_line6, x_right_line6, y_right_line6)]

# Vytvářím data pro každý interval a zároveň ukládám Bezierovény křivky
vysledky = []
krivky = []
nrapr_lefts = []
b_rights = []

for interval in intervaly:
    vysledek, křivka, nrapr_left, b_right = vytvorit_data(*interval)
    vysledky.append(vysledek)
    krivky.append(křivka)
    nrapr_lefts.append(nrapr_left)
    b_rights.append(b_right)

# Zkouška..ze všeho něco
plt.figure(figsize=(9,9))
plt.xlim([x_left, x_right])
plt.ylim([y_left, y_right])
plt.plot(b['x2'], b['y'], label='Kvarková hmota')
plt.plot(nrapr['x2'], nrapr['y'], label='Baryonová hmota')

# Nový dataset pro každý interval
for i, vysledek in enumerate(vysledky):
    plt.plot(vysledek['x2'], vysledek['y'], label=f'Výsledky {i+1}')

if intersection is not None:
    plt.plot(intersection.x, intersection.y, 'ro')

plt.xlabel('Tlak')
plt.ylabel('Chemický potenciál')
plt.legend()
plt.show()
```

Obrázek 3.5. Transformace dat.

Tato část práce je řešena pomocí funkce `vytvorit_data()`, která přijímá dva body (počáteční a koncový) z každé interpolované linie, které byly vypočteny v předchozí fázi. Funkce pak vytváří datový set, který zahrnuje následující:

1. Data baryonové hmoty (n_{rapr}) od začátku do počátečního interpolovaného bodu.
2. Beziérovu křivku spojující počáteční a koncový interpolovaný bod, která je složena z tisíce bodů a tvoří "most" mezi baryonovou a kvarkovou hmotou.
3. Data kvarkové hmoty (b) od koncového interpolovaného bodu až do konce.

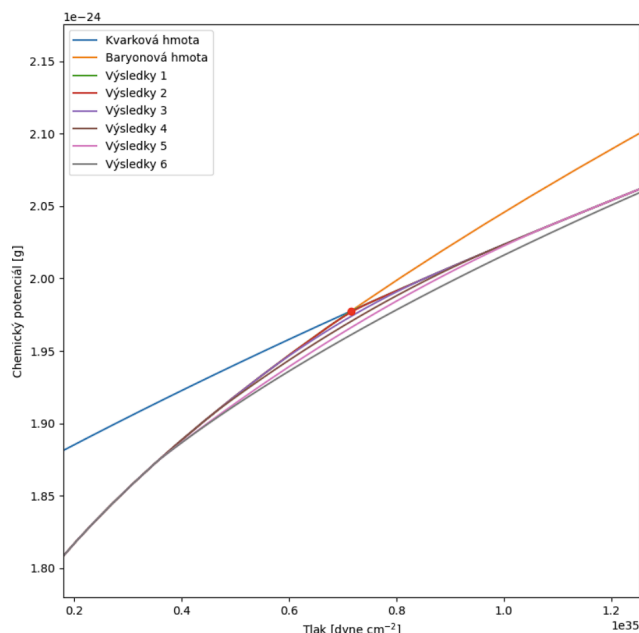
Pro každou ze šesti interpolací je tato funkce volána v rámci cyklu `for`, což vede k vytvoření šesti různých datových sad.

Následuje vizualizace těchto dat pomocí `matplotlib`. Graf je nastaven tak, aby omezení os odpovídalo hranicím, které byly vypočteny dříve. Křivky kvarkové a baryonové hmoty jsou zobrazeny společně s interpolovanými daty pro každý interval. Bod průsečíku je také zvýrazněn na grafu.

Jinými slovy, tento kód provádí následující kroky:

1. Definuje funkci pro vytvoření nových datových sad na základě počátečních a koncových bodů interpolací.
2. Pro každý interval (definovaný počátečními a koncovými body interpolace) vytváří novou datovou sadu.
3. Vizualizuje všechny datové sady na jednom grafu, s omezením os podle dříve vypočtených hranic.

Na výstup grafu se můžeme podívat na (obrázek 3.6)



Obrázek 3.6. Vykreslení grafu pro všechny křivky.

Tato část kódu (obrázek 3.7) nejprve pro každou Beziérovu křivku vytváří seznam `nb_2`, který představuje numerickou aproximaci derivace tlaku vůči chemickému potenciálu $n_B = \partial P / \partial \mu$. Tato hodnota se pak použije k výpočtu `ed_2`, což je hustota energie vypočítaná pomocí rovnice $\epsilon = \mu n_B - P$, kde místo μ stále používáme 'y' sloupec. Takto vypočtené hodnoty `ed_2` a `nb_2` jsou poté uloženy do dataframe `ed2_df` a přidány do seznamu `ed2_df_list`.

```
# ukládání výsledků
nb_2_list = []
ed2_df_list = []

# Začátek cyklu
for i, curve in enumerate(krivky):
    print(f"Výpočet pro Bezierovu křivku {i+1}:")

    # x2 pro každou bezierovu křivku
    print(f"Bezierova křivka {i+1} x2 hodnoty:")
    print(curve['x2'])
    print("\n")

    # opis jenom s křivkou
    index = np.arange(1, len(curve)-1, 1, dtype=int)
    nb_2 = np.zeros(len(curve))

    for i in index:
        nb_2[i] = (curve['x2'].iloc[i+1] - curve['x2'].iloc[i-1]) / (curve['y'].
        .iloc[i+1] - curve['y'].iloc[i-1]) / c_2
        nb_2[0] = (curve['x2'].iloc[1] - curve['x2'].iloc[0]) / (curve['y'].iloc[1]
        - curve['y'].iloc[0]) / c_2
        nb_2[len(curve)-1] = (curve['x2'].iloc[-1] - curve['x2'].iloc[-2]) /
        (curve['y'].iloc[-1] - curve['y'].iloc[-2]) / c_2

    # Uložení do seznamu
    nb_2_list.append(nb_2)

    # Spočítáme ed_2 a uložíme do dataframe
    ed_2 = curve['y']*nb_2 - curve['x2']/c_2
    ed2_df = pd.DataFrame({'x1':ed_2.values, 'x3':nb_2})

    # Uložíme dataframe do seznamu
    ed2_df_list.append(ed2_df)

# Vypíšeme výsledky po cyklu
for i, df in enumerate(ed2_df_list):
    print(f"Výsledky pro Bezierovu křivku {i+1}:")
    print(df)
```

Obrázek 3.7. Výpočty dat pro každou Bezierovu křivku.

V druhé části kódu (obrázek 3.8) se následně pro každou Beziérovu křivku spojí původní data s nově vypočítanými hodnotami `ed_2` a `nb_2` a výsledný dataframe je uložen do seznamu `curve2_list`. Dále je vytvořen dataframe `result2`, který spojuje data z levé strany (`nrapr_lefts`), upravenou Beziérovu křivku a data z pravé strany (`b_rights`). Závěrem jsou provedeny kontroly a všechny výsledky jsou vypsány.

Poté, co kontrola proběhne úspěšně, necháváme vykreslit graf všech dataframů, které jsme nyní vytvořili (obrázek 3.9).

```

# Seznamy pro uložení výsledků
curve2_list = []
result2_list = []
checks_list = []

# Začínáme s cyklem
for i, (curve, ed2_df, nrapr_left, b_right) in enumerate(zip(krivky, ed2_df_list, nrapr_lefts, b_right)):
    print(f"Výpočet pro Bezierovu křivku {i+1}:")

    curve2 = curve.join(ed2_df, lsuffix='_caller', rsuffix='_other')
    curve2 = curve2[['x1', 'x2', 'x3', 'y']]

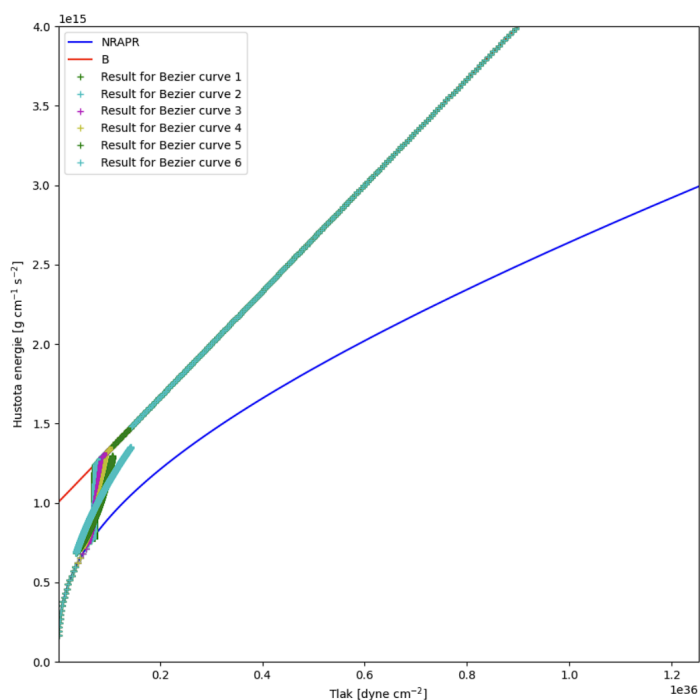
    # Ukládáme do seznamu
    curve2_list.append(curve2)

    result2 = pd.concat([nrapr_left, curve2, b_right])
    checks = [
        result2.iloc[len(nrapr_left)-1],
        result2.iloc[len(nrapr_left)],
        result2.iloc[len(nrapr_left)+len(curve2)],
        result2.iloc[-1]
    ]

    # Znovu ukládáme
    result2_list.append(result2)
    checks_list.append(checks)

# Zobrazíme výsledky pro kontrolu
for i, (curve2, result2, checks) in enumerate(zip(curve2_list, result2_list, checks_list)):
    print(f"Výsledky pro Bezierovu křivku {i+1}:")
    print("curve2:")
    print(curve2)
    print("result2:")
    print(result2)
    print("checks:")
    for j, check in enumerate(checks):
        print(f"Check {j+1}:")
        print(check)

```

Obrázek 3.8. Vypočítávání hodnot ed_2 , nb_2 a uložení dataframe

Obrázek 3.9. Graf s vykreslenými dataframy jako Result for Bezier curve

3.5. Implementace TOV rovnic

V této části analýzy se zaměříme na implementaci Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) rovnic, které hrají klíčovou roli při popisu struktury statických, sféricky symetrických těles v obecné teorii relativity uvedené v 2.5. TOV rovnice umožňují určit jak vnější, tak i vnitřní strukturu těchto těles, s přihlédnutím k efektům gravitace a tlaku na jejich chování.

```
#Konstanty
c_2 = 29979245800**2
G=6.6743e-8
Msol=2.e+33

eos_results = []

#cyklíme výsledky pro křivky
for i, result2 in enumerate(result2_list):
    eos_e = result2['x1'].to_numpy(dtype='float64')
    eos_P = result2['x2'].to_numpy(dtype='float64')
    os_nb = result2['x3'].to_numpy(dtype='float64')

    print(f"Délka eos_e pro Bezierovu křivku {i+1}: {len(eos_e)}")
    print(f"Délka eos_P pro Bezierovu křivku {i+1}: {len(eos_P)}")
    print(f"eos_e pro Bezierovu křivku {i+1}: {eos_e}\n")

    eos_results.append({"eos_e": eos_e, "eos_P": eos_P,
        "eos_nb": eos_nb})
```

Výpočet začíná definováním potřebných konstant, které se budou dále používat. Následně připravujeme seznam `eos_results`, do kterého jsme ukládali výsledky pro jednotlivé Beziérovky křivky.

Pro každou Beziérovku křivku převedeme energii (`eos_e`), tlak (`eos_P`) a baryonovou hustotu (`eos_nb`) do formátu numpy a tyto hodnoty ukládáme do seznamu `eos_results`.

```
from numpy import interp
from scipy.integrate import odeint
from scipy.interpolate import interp1d
```

```
MR_results = []

def edens(Press, eos_P, eos_e):
    en = np.interp(Press, eos_P, eos_e)
    return en

def tov(y, r, eos_P, eos_e):
    P, m = y
    e = edens(P, eos_P, eos_e)
    dydr = [-G*(e + P/c_2)*(m + 4.0*np.pi*r**3*P/c_2)/
            (r*(r - 2.0*G*m/c_2)), 4.0*np.pi*r**2*e]
    return dydr
```

Následně definujeme funkci `edens`, která vrací hustotu energie pro daný tlak. Tato funkce se používá ve funkci `tov`, která implementuje TOV rovnice.

```
Pc_max = 3.e36
Pc_min = 1.e34
Pc_ar = np.logspace(np.log10(Pc_min), np.log10(Pc_max), 500)

for i, eos_res in enumerate(eos_results):
    eos_e = eos_res['eos_e']
    eos_P = eos_res['eos_P']
    eos_nb = eos_res['eos_nb']

    M_ar = []
    R_ar = []
    P_ar = []
    ec_ar = []

    errors = 0
    for Pcen in Pc_ar:
        ecen = np.interp(Pcen, eos_P, eos_e)
        rpoints = 10000
        r = np.linspace(1., 40.e5, rpoints+1)
        y0 = [Pcen, 4.*np.pi*r[0]**3/3.*ecen]
        sol = odeint(tov, y0, r, args=(eos_P, eos_e))

        if (sol[rpoints, 0] < 0):
```



```

        Psol = interp1d(sol[:, 0], sol[:, 1])
        rsol = interp1d(sol[:, 0], r)
        Mass = Psol(0.) / Msol
        Rad = rsol(0.) / 1.e5
        P_ar.append(Pcen)
        ecen = edens(Pcen, eos_P, eos_e)
        M_ar.append(Mass)
        R_ar.append(Rad)
        ec_ar.append(ecen)
    else:
        errors += 1

print(f"Počet chyb pro Bezierovu křivku {i+1}: {errors}")

MR_results.append({"M": M_ar, "R": R_ar, "P": P_ar,
                  "ec": ec_ar})

```

Poté vytváříme pole hodnot centrálního tlaku (P_{c_ar}), které používáme při řešení TOV rovnic. Pro každou Beziérovu křivku a pro každou hodnotu centrálního tlaku se vypočítávají odpovídající hodnoty hmotnosti a poloměru. Pokud se podaří najít řešení TOV rovnic pro danou hodnotu centrálního tlaku, uložíme odpovídající hodnoty do příslušných seznamů. V opačném případě se zvyšuje počítadlo chyb. Všechny vypočítané hodnoty poté ukládáme do seznamu `MR_results`.

```

import matplotlib.pyplot as plt

# První graf
plt.figure(figsize=(10,10))
for i, result in enumerate(MR_results):
    plt.plot(result["R"], result["M"],
             label=f'Bezier curve {i+1}')
#plt.ylim(0.25, 1.50)
plt.xlabel(r'$R$ [km]')
plt.ylabel(r'$M$ [M_\odot]')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()

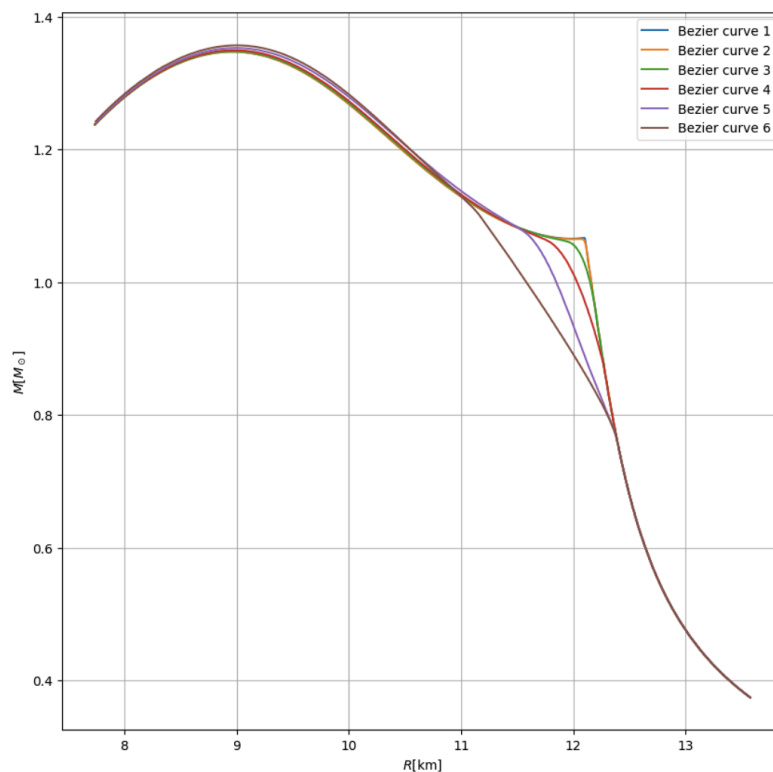
```

```

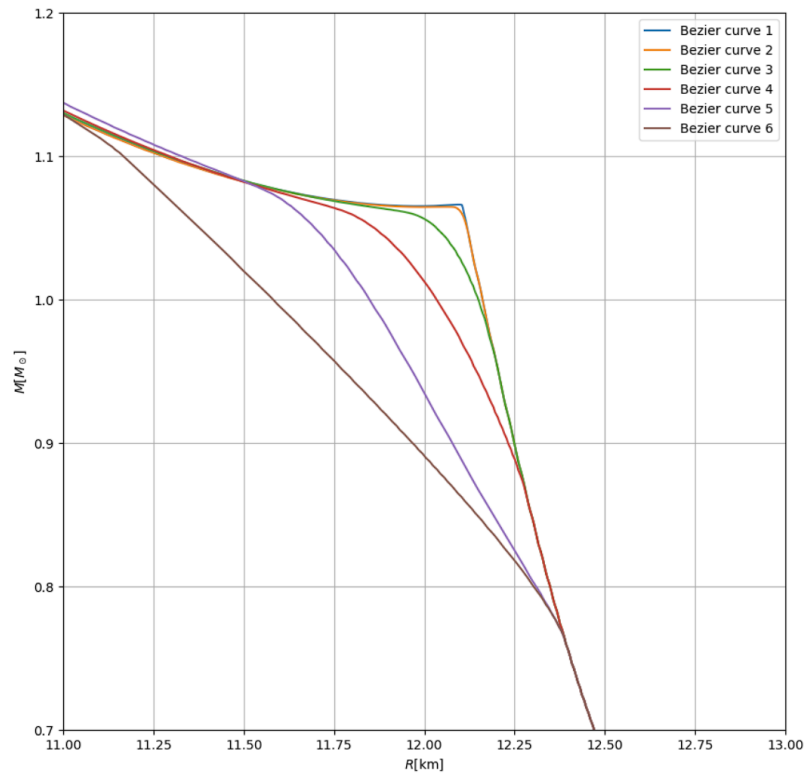
# Druhý graf
plt.figure(figsize=(10,10))
for i, result in enumerate(MR_results):
    plt.plot(result["R"], result["M"],
             label=f'Bezier curve {i+1}')
plt.xlim(11, 13)
plt.ylim(0.7, 1.2)
plt.xlabel(r'$R$[km]')
plt.ylabel(r'$M[M_\odot]$')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()

```

Na závěr vizualizujeme výsledky. Vytvoříme dva grafy, které zobrazují vztah mezi poloměrem a hmotností pro jednotlivé Beziérovky křivky. První graf ukazuje celkový vztah (obrázek 3.10), zatímco druhý je zaměřen na konkrétní oblast našeho zájmu (obrázek 3.11).



Obrázek 3.10. Celkový vztah pro data kvarkové hmoty 25.



Obrázek 3.11. Přiblížení jednotlivých průběhů křivek pro dataset 25. kvarkové hmoty.

Tímto způsobem jsme úspěšně s vedoucím práce implementovali a vyřešili TOV rovnice pro všechny Beziérovky křivky vytvořené EoS daty dvojící hmot. Nyní můžeme modelovat hybridní neutronové hvězdy (baryono - kvarkové neutronové hvězdy) ve formě M - R diagramů pro různé stavové rovnice a finální výstupy mezi sebou rozebírat.

Kapitola 4

Výsledky a diskuze

Díky kódu jsem pro jednotlivé EoS rovnice našel hodnoty bodů fázových přechodů, které uvádím v tabulce 4.1. V tabulce vidíme, že se zvyšující se hodnotou bagové konstanty Bag tlak a chemický potenciál přechodu roste. Dále vidíme, že pro hodnoty $Bag < 1.7 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ k fázovému přechodu nedochází. To je dáno tím, že v těchto případech je chemický potenciál kvarkové hmoty za nulového tlaku nižší než chemický potenciál jaderné hmoty. Tato situace popisuje tzv. podivné hvězdy, které jsou tvořeny kvarkovou hmotou od jádra až k povrchu.

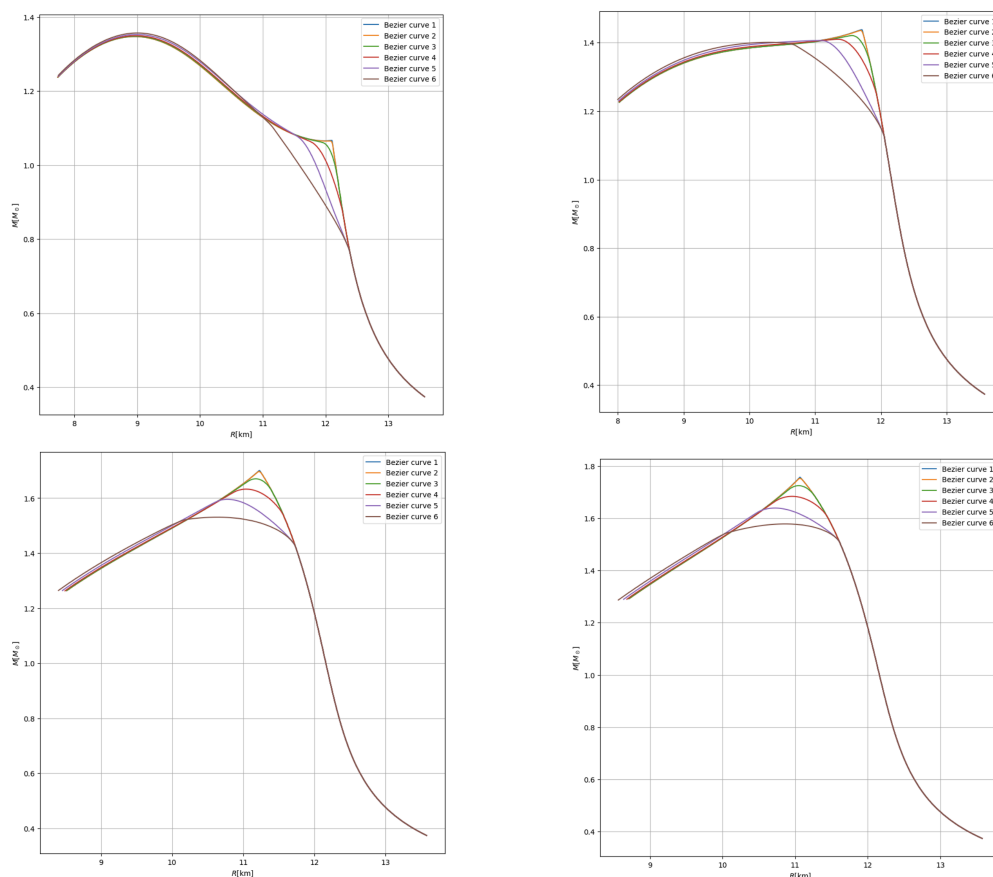
NRAPR		
Kvarková hmota	Tlak	Chemický potenciál
B10 as0	0	0
B12 as0	0	0
B14 as0	0	0
B16 as0	0	0
B17 as0	1.083419×10^{30}	1.675853×10^{-24}
B18 as0	9.113081×10^{32}	1.702357×10^{-24}
B20 as0	9.591349×10^{33}	1.768170×10^{-24}
B23 as0	4.050511×10^{34}	1.890090×10^{-24}
B25 as0	7.159502×10^{34}	1.977603×10^{-24}
B29 as0	1.436796×10^{35}	2.137437×10^{-24}
B30 as0	1.620263×10^{35}	2.172681×10^{-24}
B35 as0	2.474823×10^{35}	2.320894×10^{-24}
B40 as0	3.229647×10^{35}	2.436310×10^{-24}
B41 as0	3.370226×10^{35}	2.456622×10^{-24}
B45 as0	3.901981×10^{35}	2.530781×10^{-24}
B47 as0	4.151985×10^{35}	2.564325×10^{-24}
B50 as0	4.511471×10^{35}	2.611176×10^{-24}

Tabulka 4.1. Zjištěné hodnoty průsečíků pro jednotlivé stavové rovnice kvarkové hmoty. V levém loupici máme stavové rovnice, kde B10 a dále udává $Bag = 1.0 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$

Toto byl první krok pro úspěšné vyřešení nových hybridních EoS rovnic s jinými fázovými přechody. Tyto nové stavové rovnice jsou vytvořené pomocí Beziérových křivek v okolí fázového přechodu. Tuto část kódu vysvětlují kapitoly 3.3 a 3.4.

Nyní budu rozebírat vytvořené výsledky ze čtyř různých kvarkových stavových rovnic (B25, B30, B40, B45), které se liší v Bagově konstantním parametru. Jejich výstupy ve formě M - R diagramů jsou na společném obrázku 4.1.

Jednotlivé průběhy křivek v M - R diagramech představují možný vývoj podivné neutronové hvězdy pro její nově vytvořenou stavovou rovnici (EoS). Na ose x je poloměr neutronové hvězdy (km), na ose y je vyjádřená hmotnost M_{\odot} . Jak můžeme vidět, pro každou stavovou rovnici existuje maximální hmotnost i poloměr, kterých může hvězda dosáhnout.



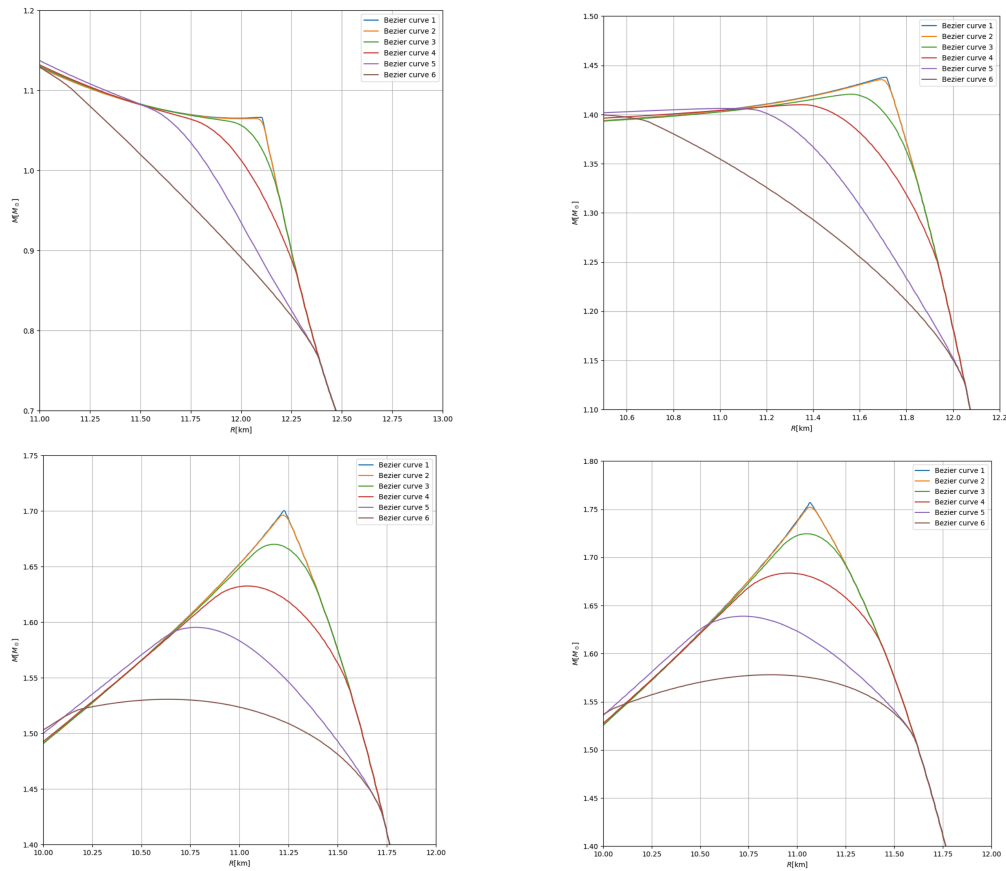
Obrázek 4.1. Modely hybridních neutronových hvězd pro různé EoS s různými fázovými přechody. $Bag = 2.5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ (vlevo nahoře), $Bag = 3.0 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ (vpravo nahoře), $Bag = 4.0 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ (vlevo dole), $Bag = 4.5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ (vpravo dole)

Z prvního diagramu (vlevo nahoře) na obrázku 4.1 pro Bagovu konstantu $Bag = 2.5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. vidíme, že maximální hmotnost neutronové hvězdy je okolo $1.3 M_{\odot}$. Všimnout si můžeme i fázového přechodu, díky kterému nastává změna vlastností uvnitř hvězdy. Tento přechod je na křivce patrný. To nám napovídá, že při určitém centrálním tlaku dochází k nárůstu hmotnosti hvězdy.

V druhém diagramu (vpravo nahoře) pro $Bag = 3.0 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ můžeme vidět hmotnost hvězdy růst až do jejího maxima, kterého nabývá v bodě fázového přechodu, okolo $1.5 M_{\odot}$. V námi zkoumaných případech vidíme, že maximální hmotnost hybridních hvězd je větší v situacích s vyšší Bagovou konstantou.

U posledních dvou diagramů (vlevo a vpravo dole) pro $Bag = 4.0$ a $4.5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ pozorujeme během fázového přechodu výrazného nárůstu hmoty, který nastává za menších poloměrů než tomu bylo u prvních dvou diagramů.

Jak jsme si mohli všimnout, každý model hybridní hvězdy se v diagramu lehce liší. Jednak pro malé bagovy hodnoty jsme viděli, že se na křivce vyskytují dvě maxima. Naproti tomu u vysokých hodnot je jenom jedno maximum. Dále se liší v prostředí fázového přechodu 4.2. Právě k tomuto výstupu byla práce směřována. Je to způsobeno tím, že kód v této lokalitě vytvářel nové stavové rovnice pro každý "most" vytvořený Beziérovou křivkou, která představovala nový, jemnější fázový průběh. Tyto průběhy jsme mohli vidět ve třetí kapitole na obrázku 3.6.



Obrázek 4.2. Přiblížení obrázku 4.1 na úseky fázových přechodů.

V legendě u přiloženého obrázku 4.2 vidíme pojmenování "Bezier curve 1-6" pro křivky představující různé průběhy změn struktur hybridních hvězd.

Celkově lze říci, že v případě $B_{ag} = 2.5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ nemá přítomnost smíšené fáze vliv na maximální možnou hmotnost hybridních hvězd a že v tomto případě je maximální hmotnost hvězd dominována kvarkovou stavovou rovnicí. V případech s vyšší bagovou konstantou má model smíšené fáze vliv na maximální možnou hmotnost hybridních hvězd. Větší interval smíšené fáze maximální hmotnost snižuje.

Závěr

Cílem práce bylo studovat přítomnost smíšené fáze v neutronových (hybridních) hvězdách a její vliv na vlastnosti neutronových hvězd. Vytvořil jsem numerický kód v jazyce Python, který najde kritický tlak P_c a odpovídající chemický potenciál, za kterých jsou kvarková a baryonová hmota v rovnováze. Dále jsme uvažovali možnou přítomnost smíšené fáze v okolí kritického tlaku. Smíšenou fázi jsme stanovili v intervalu $(\alpha P_c - \beta P_c)$, kde $\alpha < 1$ a $\beta > 1$ jsou námi zvolené parametry. V této práci jsme zadali hodnoty od $\alpha = 0.99$ až 0.5 a pro hodnoty $\beta = 1.01$ až 2 . Po vytvoření stavové rovnice s fázovým přechodem jsme vyřešili rovnici hydrostatické rovnováhy pro širokou škálu tlaků a zkoumali jsme vlivy parametrů α a β na modelech neutronových hvězd. Výsledky jsme diskutovali v kapitole 4.

Ukázali jsme, že vliv na maximální hmotnost existuje v situacích, kdy přechod ke kvarkové hmotě vede k nestabilním konfiguracím. Hybridní hvězdy by neexistovaly, pokud bychom o smíšené fázi neuvažovali (viz. např. [16]).

Lze konstatovat, že cíle zadání práce bylo dosaženo.

V budoucnu by bylo jistě užitečné vylepšit nebo využít přesnějších modelů stavových rovnic pro kvarkové hmoty, dále zkoumání vlivů hmotnosti strange kvarku a parametru silné interakce na vlastnosti hybridních hvězd. Také navrhuji možnost využití grafu, který zkoumá vliv hmotnosti na tlak u smíšených fází hybridních neutronových hvězd.

Literatura

- [1] DOROSHENKO, V.; SULEIMANOV, V.; PÜHLHOFER, G. & SANTANGELO, A.: A strangely light neutron star within a supernova remnant. *Nature Astronomy*, **6**, str. 1444–1451, prosinec 2022, doi:[10.1038/s41550-022-01800-1](https://doi.org/10.1038/s41550-022-01800-1).
- [2] HADES COLLABORATION; ADAMCZEWSKI-MUSCH, J.; ARNOLD, O.; BEHNKE, C.; BELOUNAS, A.; BELYAEV, A.; BERGER-CHEN, J. C.; BIERNAT, J.; BLANCO, A.; BLUME, C.; BÖHMER, M.; BORDALO, P.; CHERNENKO, S.; CHLAD, L.; DEVEAUX, C.; DITTERT, D.; DREYER, J.; DYBCZAK, A.; EPPLE, E.; FABBETTI, L.; FATEEV, O.; FILIP, P.; FONTE, P.; FRANCO, C.; FRIESE, J.; FRÖHLICH, I.; GALATYUK, T.; GARZÓN, J. A.; GERNHÄUSER, R.; GOLUBEVA, M.; GREIFENHAGEN, R.; GUBER, F.; GUMBERIDZE, M.; HARABASZ, S.; HEINZ, T.; HENNINO, T.; HLAVAC, S.; HÖHNE, C.; HOLZMANN, R.; IERUSALIMOV, A.; IVASHKIN, A.; KÄMPFER, B.; KARAVICHEVA, T.; KARDAN, B.; KOENIG, I.; KOENIG, W.; KOLB, B. W.; KORCYL, G.; KORNAKOV, G.; KOTTE, R.; KUGLER, A.; KUNZ, T.; KUREPIN, A.; KURILKIN, A.; KURILKIN, P.; LADYGIN, V.; LALIK, R.; LAPIDUS, K.; LEBEDEV, A.; LOPES, L.; LORENZ, M.; MAHMOUD, T.; MAIER, L.; MANGIAROTTI, A.; MARKERT, J.; MAURUS, S.; METAG, V.; MICHEL, J.; MIHAYLOV, D. M.; MOROZOV, S.; MÜNTZ, C.; MÜNZER, R.; NAUMANN, L.; NOWAKOWSKI, K. N.; PALKA, M.; PARPOTTAS, Y.; PECHENOV, V.; PECHENOVA, O.; PETUKHOV, O.; PIETRASZKO, J.; PRZYGODA, W.; RAMOS, S.; RAMSTEIN, B.; RESHETIN, A.; RODRIGUEZ-RAMOS, P.; ROSIER, P.; ROST, A.; SADOVSKY, A.; SALABURA, P.; SCHEIB, T.; SCHULDES, H.; SCHWAB, E.; SCOZZI, F.; SECK, F.; SELLHEIM, P.; SELYUZHENKOV, I.; SIEBENSON, J.; SILVA, L.; SOBOLEV, Y. G.; SPATARO, S.; SPIES, S.; STRÖBELE, H.; STROTH, J.; ÇSTRZEMPEK, P.; STURM, C.; SVOBODA, O.; SZALA, M.; TLUSTY, P.; TRAXLER, M.; TSERTOS, H.; USENKO, E.; WAGNER, V.; WENDISCH, C.; WIEBUSCH, M. G.; WIRTH, J.; ZANEVSKY, Y. & ZUMBRUCH, P.: Probing dense baryon-rich matter with virtual photons. *Nature Physics*, **15**(10), str. 1040–1045, červenec 2019, doi:[10.1038/s41567-019-0583-8](https://doi.org/10.1038/s41567-019-0583-8).
- [3] BAADE, W. & ZWICKY, F.: On Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, **20**(5), str. 254–259, květen 1934, doi:[10.1073/pnas.20.5.254](https://doi.org/10.1073/pnas.20.5.254).
- [4] PAULI, W.: The Connection Between Spin and Statistics. *Physical Review*, **58**(8), str. 716–722, říjen 1940, doi:[10.1103/PhysRev.58.716](https://doi.org/10.1103/PhysRev.58.716).
- [5] HEWISH, A.; BELL, S. J.; PILKINGTON, J. D. H.; SCOTT, P. F. & COLLINS, R. A.: Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. *Nature*, **217**(5130), str. 709–713, únor 1968, doi:[10.1038/217709a0](https://doi.org/10.1038/217709a0).

- [6] LATTIMER, J. M. & PRAKASH, M.: Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints. *Phys. Rep.*, **442**(1-6), str. 109–165, duben 2007, doi:[10.1016/j.physrep.2007.02.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2007.02.003). arXiv:[astro-ph/0612440](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0612440).
- [7] HAENSEL, P.; POTEKHIN, A. Y. & YAKOVLEV, D. G.: *Neutron Stars I : Equation of State and Structure*, svazek 326, 2007.
- [8] ALFORD, M.; BRABY, M.; PARIS, M. & REDDY, S.: Hybrid Stars that Masquerade as Neutron Stars. *ApJ*, **629**(2), str. 969–978, srpen 2005, doi:[10.1086/430902](https://doi.org/10.1086/430902). arXiv:[nuc1-th/0411016](https://arxiv.org/abs/nuc1-th/0411016).
- [9] WEBER, F.: Strange quark matter and compact stars. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **54**(1), str. 193–288, březem 2005, doi:[10.1016/j.pnpnp.2004.07.001](https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2004.07.001). arXiv:[astro-ph/0407155](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0407155).
- [10] ABBOTT, B. P. & KOL.: GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, **119**(16), 161101, říjen 2017, doi:[10.1103/PhysRevLett.119.161101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101). arXiv:[1710.05832](https://arxiv.org/abs/1710.05832).
- [11] FUKUSHIMA, K. & HATSUDA, T.: The phase diagram of dense QCD. *Reports on Progress in Physics*, **74**(1), 014001, leden 2011, doi:[10.1088/0034-4885/74/1/014001](https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/1/014001). arXiv:[1005.4814](https://arxiv.org/abs/1005.4814).
- [12] BLASCHKE, D. & CHAMEL, N.: Phases of Dense Matter in Compact Stars. V L. REZZOLLA; P. PIZZOCHERO; D. I. JONES; N. REA & I. VIDAÑA, editoři, *Astrophysics and Space Science Library*, svazek 457 série *Astrophysics and Space Science Library*, str. 337, leden 2018, doi:[10.1007/978-3-319-97616-7_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-97616-7_7). arXiv:[1803.01836](https://arxiv.org/abs/1803.01836).
- [13] ÖZEL, F. & FREIRE, P.: Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars. *ARA&A*, **54**, str. 401–440, září 2016, doi:[10.1146/annurev-astro-081915-023322](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081915-023322). arXiv:[1603.02698](https://arxiv.org/abs/1603.02698).
- [14] BAYM, G.; HATSUDA, T.; KOJO, T.; POWELL, P. D.; SONG, Y. & TAKATSUKA, T.: From hadrons to quarks in neutron stars: a review. *Reports on Progress in Physics*, **81**(5), 056902, květen 2018, doi:[10.1088/1361-6633/aae14](https://doi.org/10.1088/1361-6633/aae14). arXiv:[1707.04966](https://arxiv.org/abs/1707.04966).
- [15] STEINER, A. W.; PRAKASH, M.; LATTIMER, J. M. & ELLIS, P. J.: Isospin asymmetry in nuclei and neutron stars [review article]. *Phys. Rep.*, **411**(6), str. 325–375, červen 2005, doi:[10.1016/j.physrep.2005.02.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.02.004). arXiv:[nuc1-th/0410066](https://arxiv.org/abs/nuc1-th/0410066).
- [16] URBANEC, M. & FUZIK, M.: Neutron stars with quark cores. V Z. STUHLÍK; G. TÖRÖK, & V. KARAS, editoři, *RAGtime 20–22: Workshops on black holes and neutron stars*, str. 343–350, prosinec 2020.